Chapitre 26 : Variables aléatoires

Espérance et Variance

Exercice 1: Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé fini.
Déterminer le minimum de la fonction

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ m & \longmapsto & \mathrm{E}\big((X-m)^2\big) \end{array}.$$

Exercice 2: Un joueur lance deux fois de suite un dé à six faces équilibré.
Soit X la variable aléatoire égale à la différence entre les résultats du premier et du second lancer.

1. Déterminer les lois de X, $|X|$, X^2.
2. Calculer l'espérance et la variance des lois X et $|X|$.

Exercice 3: Soient $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1,n]\!]$ telle que :

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad P(X=k) = \lambda k.$$

Déterminer λ, $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{V}(X)$.

Exercice 4: Soit X une v.a. qui suit la loi uniforme sur $[\![0,n]\!]$ ($n \in \mathbb{N}^*$).
Déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire $Y = \cos\left(\dfrac{\pi X}{n}\right)$.

Exercice 5: Soient a et b deux entiers relatifs tels que $a \leqslant b$, et soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[\![a,b]\!]$.

1. Déterminer μ de sorte que $Y = X + \mu$ suive la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$, où n est un entier à expliciter.
2. En déduire $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{V}(X)$.

Exercice 6: Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$.
Quelle est la loi de la variable aléatoire $n - X$? Interpréter.

Exercice 7: Soit Ω, P un espace probabilisé et soit A un évènement de Ω.
Déterminer $\mathrm{V}(\mathbb{1}_A)$.

Couples de variables aléatoires

Exercice 8: On suppose que X et Y sont 2 variables aléatoires de même loi binomiale $\mathscr{B}\left(2, \frac{1}{2}\right)$ telles que $Z = X + Y$ suive une loi binomiale $\mathscr{B}\left(4, \frac{1}{2}\right)$.
On sait également que $P((X=1) \cap (Y=0)) = \frac{5}{32}$.

1. Calculer $P(Z=0)$ et en déduire $P(X=0 \cap Y=0)$.
2. Déterminer la loi du couple (X,Y).
3. Calculer $\mathrm{Cov}(X,Y)$ de deux façons différentes.
4. Déterminer la loi de $\min(X,Y)$.

Exercice 9:
Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On les extrait successivement sans remise. Soit $i \in [\![1,n]\!]$, on dit qu'il y a rencontre au i-ème tirage si la i-ème boule tirée porte le numéro i. Posons X_i la variable aléatoire qui vaut 1 s'il y a rencontre au i-ème tirage et 0 sinon. On note X la variable aléatoire égale au nombre de rencontres.

1. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, déterminer la loi de X_i.
2. En déduire l'espérance de X. Interpréter.
3. Calculer $\mathrm{V}(X)$.

Exercice 10: Une urne contient 3 boules blanches et 5 boules noires.
On tire successivement et sans remise deux boules dans l'urne.
On note X_1 (respectivement X_2) la variable aléatoire qui vaut 1 si le premier tirage (respectivement le second tirage) amène une boule blanche, 0 sinon.

1. Déterminer la loi de X_1.
2. Déterminer les lois conditionnelles de X_2 sachant $\{X_1 = k\}$, pour $k \in X_1(\Omega)$.
3. Déterminer la loi conjointe du couple (X_1, X_2).
4. Déterminer la loi de X_2.
5. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

<u>Exercice</u> <u>11:</u> Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On dispose de n urnes numérotées de 1 à n.
Dans l'urne numéro k, il y a k boules numérotées de 1 à k.
On choisit une urne au hasard puis dans celle-ci, on pioche une boule au hasard.
On note X la variable aléatoire égale au numéro de l'urne choisie, et Y la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.

1. Quelle est la loi de X ? la loi conditionnelle de Y sachant $\{X = i\}$, pour $i \in [\![1, n]\!]$?
2. Déterminer la loi conjointe et les lois marginales du couple (X, Y).
   On pourra laisser certains résultats sous forme de sommes.
3. Calculer $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{E}(Y)$ et $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

<u>Exercice</u> <u>12:</u> Une urne contient N boules qui sont blanches, rouges ou noires.
On note p_B et p_R les proportions respectives de boules blanches et rouges.
On extrait successivement et avec remise n boules dans cette urne.
Soient B et R les variables aléatoires égales respectivement au nombre de boules blanches et rouges obtenues.

1. Déterminer $\mathrm{V}(B)$, $\mathrm{V}(R)$ et $\mathrm{V}(B+R)$.
2. En déduire $\mathrm{Cov}(B, R)$.

Inégalités de concentration

<u>Exercice</u> <u>13:</u> On lance n fois une pièce non truquée.
On note F_n la variable aléatoire égale à la fréquence d'apparition de "pile" au cours des n expériences.

1. Calculer $\mathrm{E}(F_n)$ et $\mathrm{V}(F_n)$.
2. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer un entier naturel n_0 tel que pour tout n supérieur à n_0, on ait $P\left(0,49 < F_n < 0,51\right) \geqslant 95\%$ (on dit alors que $]0,49\,;0,51[$ est un intervalle de fluctuation de F_n au seuil de 95%).

<u>Exercice</u> <u>14:</u> *Inégalité de Hoeffding*
Soit $(\Omega\,,\,P)$ un espace probabilisé fini.

1. Démontrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in [-1; 1]$,
$$\mathbf{e}^{tx} \leqslant \frac{1}{2}(1-x)\mathbf{e}^{-t} + \frac{1}{2}(1+x)\mathbf{e}^{t}\,.$$
2. Soit X une variable aléatoire réelle centrée sur $(\Omega\,,\,P)$ telle que $|X| \leqslant 1$.
   Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{E}(\mathbf{e}^{tX}) \leqslant \mathrm{ch}(t) \leqslant \mathbf{e}^{\frac{t^2}{2}}$.
3. Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes, centrées et telles que $|X_i| \leqslant 1$ pour tout $i \in [\![1; n]\!]$. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.
   (a) Montrer que $\mathrm{E}(\mathbf{e}^{tS_n}) \leqslant \exp\left(\frac{nt^2}{2}\right)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
   (b) Soient $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $t \in \mathbb{R}^+$, démontrer que $P(S_n \geqslant \varepsilon) \leqslant \exp\left(-t\varepsilon + \frac{nt^2}{2}\right)$.
   (c) En déduire, que pour tout $\varepsilon > 0$, $P(S_n \geqslant \varepsilon) \leqslant \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2n}\right)$.
   (d) Conclure, en démontrant l'inégalité de Hoeffding ci-dessous :
$$\forall \varepsilon > 0, \quad P(|S_n| \geqslant \varepsilon) \leqslant 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2n}\right)$$
4. Soit Y suivant une loi de binomiale de paramètre $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0; 1]$. Soit $\varepsilon > 0$.
   (a) Majorer la quantité $P\left(\left|\frac{Y}{n} - p\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)$ à l'aide de l'inégalité de Hoeffding.
   (b) Majorer la même quantité à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
   (c) Comparer les deux majorations.